ÉCOLE NAVALE

Concours 1992

Première composition de mathématiques

Durée : 3 heures

Le problème est composé de trois parties I, II, III totalement indépendantes.

Le correcteur demande aux candidats de rédiger avec le plus grand soin leurs démonstrations et d'encadrer les résultats obtenus. Un raisonnement vague ou incomplet ne pourra en aucun cas constituer une démonstration acceptable.

Les candidats pourront traiter une question en admettant les résultats des questions précédentes à la condition expresse de le mentionner explicitement.

On rappelle que sur un espace vectoriel E (réel ou complexe) de dimension finie toutes les normes sont équivalentes et définissent sur E la même topologie T. Toutes les parties de E seront munies de la topologie induite par T.

PARTIE I

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, une forme bilinéaire antisymétrique sur E notée [,] est une application bilinéaire sur E × E :

$$\begin{array}{rl} [\ ,\ ] & \left| \begin{array}{l} E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longrightarrow [x, y] \end{array} \right. \end{array}$$

telle que $\forall\ x \in E,\quad [x, x] = 0$.

Si $(e_1, ..., e_k)$ est une base de E , la matrice $M = \left([e_i , e_j]\right)_{1 \leq i, j \leq k}$ carrée d'ordre k est appelée matrice de [,] dans la base $(e_1, ..., e_k)$.

On dit que la forme bilinéaire antisymétrique [,] est non dégénérée si $\forall x \in E - \{0\},\ \exists\, y \in E,\ [x , y] \neq 0$.

1. — Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'une forme bilinéaire antisymétrique [,]. Soit $(e_1, ..., e_k)$ une base de E.

Soient $(x, y) \in E^2$. Si $x = \sum_{i=1}^{k} x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{k} y_j e_j$ on pose :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_k \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k.$$

a. Donner une relation très simple entre $[x, y]$ d'une part et les vecteurs colonnes X, Y et la matrice $M = \left([e_i , e_j]\right)_{1 \leq i, j \leq k}$ d'autre part.

b. Représenter M dans le cas $n = 3$, est-elle non dégénérée ? Existe-t-il sur $\mathbb{R}^{2n+1}$ une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée ?

... / ...

2. – Dans la suite de cette partie I on suppose que $\dim_{\mathbb{R}} E$ est paire et est égale à $2n$, et que E est muni d'une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée $[\ ,\ ]$.

a. L'application $\Psi \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{R}) \\ x \longrightarrow \Psi(x) : y \to [x, y] \end{array} \right.$ est-elle bijective ?

b. Soit F un sous-espace vectoriel de E, on pose :

$$\tilde{F} = \{y \in E / \ \forall x \in F, [x, y] = 0\}.$$

Déterminer $\dim \tilde{F}$ en fonction de $\dim E$ et $\dim F$.

3. – *a.* Montrer que E possède une base $(e_1, e_2, \ldots, e_{2n})$ dans laquelle la matrice de $[\ ,\ ]$ est égale à :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

où I_n est la matrice identité carrée d'ordre n. (On pourra procéder par récurrence sur n).

b. Calculer J^2 et $\det J$.

c. Un sous-espace vectoriel F de E tel que $F = \tilde{F}$ est dit lagrangien. Déterminer sa dimension. Montrer que E possède au moins un sous-espace lagrangien.

4. – Un endomorphisme S de E sera dit symplectique si $\forall (x, y) \in E^2, \quad [Sx, Sy] = [x, y]$

a. Montrer que l'ensemble – noté SP (E) – des endomorphismes symplectiques de E est un sous-groupe du groupe GL (E) des automorphismes $\mathbb{R}$-linéaires de E.

b. Soit $(e_1, \ldots, e_{2n})$ une base de E dans laquelle la matrice de $[\ ,\ ]$ est égale à J (voir **I.3.*a***). Soit $S \in SP(E)$, trouver une relation simple entre J et la matrice de S dans $(e_1, \ldots, e_{2n})$.

c. Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ et de la forme bilinéaire antisymétrique de matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer $SP(\mathbb{R}^2)$.

d. Dans le cas général, SP (E) est-il fermé [resp. borné] dans $\mathscr{L}(E)$?

5. – On appelle transvection de E toute application $u : E \to E$ telle que :

$$\exists\, x_0 \in E, \ \exists\, \lambda \in \mathbb{R} / \ \forall x \in E, \quad u(x) = x + \lambda [x_0, x]\, x_0.$$

a. Une transvection est-elle en général un élément de SP (E) ?

b. On admet que tout élément de SP (E) peut s'écrire comme produit d'au plus $4n$ transvections ($2n = \dim E$). Prouver que quelque soient u et v de SP (E), il existe une application continue :

$$f \left| \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow SP(E) \\ t \longrightarrow f(t) \end{array} \right.$$

telle que $f(0) = u$, $f(1) = v$ et $\forall t \in [0,1]$, $f(t) \in SP(E)$

c. Déterminer $\{\lambda \in \mathbb{R}^* / \ \exists\ u \in SP(E), \det u = \lambda\}$

6. – Soit $S \in SP(E)$, on pose $p(\lambda) = \det(S - \lambda\, Id)$. Établir une relation simple entre $p(\lambda)$ et $p\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

(On pourra utiliser **I.4.*b*** et **I.5.*c***).

7. – Un endomorphisme u de E est dit stable s'il existe une norme $\| \ \|$ sur E telle que :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists\, \delta > 0, \ \forall x \in E, \quad \|x\| < \delta \Longrightarrow \forall k \in \mathbb{N}^* \quad \|u^k(x)\| < \varepsilon$$

a. Soit $S \cdot SP(E)$ telle que l'une au moins des valeurs propres de S appartienne à $\{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$. S est-elle stable ?

b. Dans le cas où $\dim E = 2$, déterminer l'ensemble des éléments de SP (E) qui sont stables.

... / ...

PARTIE II

On admettra le résultat suivant. Soit $P(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{C}[\lambda_1, ..., \lambda_n]$, un polynôme (à coefficients complexes) à n variables $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tel que pour toute permutation σ de $\{1, ..., n\}$ on a :

$$P(\lambda_{\sigma(1)}, \lambda_{\sigma(2)}, ..., \lambda_{\sigma(n)}) = P(\lambda_1, ..., \lambda_n)$$

Alors il existe un polynôme R à coefficients complexes et à n variables tel que :

$P(\lambda_1, ..., \lambda_n) = R(a_1, a_2, ..., a_n)$ où $a_1, a_2, ..., a_n$ sont définis par la relation :

$$\prod_{j=1}^{n} (X - \lambda_j) = X^n - a_n X^{n-1} - a_{n-1} X^{n-2} .... - a_2 X - a_1$$

où X est une indéterminée.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $M_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes. Si $M \in M_n(\mathbb{C})$, on pose $P_M(X) = \det(M - X I_n)$.

$P_M(X)$ est le polynôme caractéristique de M.

1. — *a.* Prouver que pour tout endomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire u de $\mathbb{C}^n$, il existe une droite vectorielle D et un hyperplan H de $\mathbb{C}^n$ tels que $u(D) \subset D$, $u(H) \subset H$.

   b. Prouver que toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

2. — On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{C})$ diagonalisables (*i. e* semblables à une matrice diagonale).

   a. Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est limite d'une suite de matrices diagonalisables de $M_2(\mathbb{C})$.

   b. Montrer que tout matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de points de $\mathscr{D}$.

3. — *a.* Prouver à partir de 2. que pour toute M de $M_n(\mathbb{C})$, $P_M(M) = 0$ (théorème de Cayley-Hamilton).

   b. Application. Dans cette question — et dans cette question seulement — on suppose $n = 2$. Soit $A \in M_2(\mathbb{C}) - \{0\}$, trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur Tr A pour que :

$$\{B \in M_2(\mathbb{C}) / AB = BA\} = \{B \in M_2(\mathbb{C}) / A^2 B = BA^2\}$$

4. — On considère la matrice de $M_n(\mathbb{C})$:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & b_{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b_{n-1} \end{bmatrix}$$

   a. Calculer $P_M(X)$.

   b. Déterminer les polynômes unitaires Q(X) (dont le cœfficient dominant vaut 1) de $\mathbb{C}[X]$ de degré $\leqslant n$, tel que $Q(M) = 0$.

   c. Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur $P_M(X)$ pour que les matrices M du type précédent soient diagonalisables.

   d. Application : Déterminer $\{(a, b) \in \mathbb{C}^2\}$ tels que la matrice :

$$M_{a,b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & ab \\ 0 & 1 & -(a+b) \end{bmatrix}$$ soit diagonalisable.

5. — Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$, notons $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les zéros comptés avec multiplicité de $P_M(X)$.

On pose $D(M) = \prod_{i \neq j} (\lambda_i - \lambda_j)$.

a. Prouver que $M \to D(M)$ est continue sur $M_n(\mathbb{C})$.

b. On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{C})$ admettant n valeurs propres, deux à deux distinctes.

On dit qu'un point M de $\mathscr{D}$ est intérieur à $\mathscr{D}$ si pour toute suite $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de points de $M_n(\mathbb{C})$ convergeant vers M, il existe $C > 0$ tel que $p > C$ entraîne $A_p \in \mathscr{D}$.

Prouver que tout point de $\mathscr{S}$ est intérieur à $\mathscr{D}$.

c. Dans le cas $n = 2$ déterminer l'ensemble des points de $\mathscr{D}$ intérieurs à $\mathscr{D}$.

d. Dans le cas $n \geqslant 3$ déterminer l'ensemble des points de $\mathscr{D}$ intérieurs à $\mathscr{D}$.

PARTIE III

$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, ..., x_n)\}$ est muni du produit scalaire usuel : $(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. On note $\mathscr{O}(\mathbb{R}^n)$ le groupe des endomorphismes orthogonaux de $\mathbb{R}^n$ (*i. e* préservant le produit scalaire).

1. — *a.* Montrer que de toute suite de points de $\mathscr{O}(\mathbb{R}^n)$, on peut extraire une suite convergente dans $\mathscr{O}(\mathbb{R}^n)$.

b. Déterminer tous les homomorphismes continus $\Psi : \mathscr{O}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^* - \{0\}$ telles que $\forall (M, N) \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^n)^2$, $\Psi(MN) = \Psi(M)\Psi(N)$.

2. — Dans cette question et dans cette question seulement on suppose $n = 3$. Soit R une rotation appartenant à $\mathscr{O}(\mathbb{R}^3) - \{Id\}$, et S une symétrie hyperplane appartenant à $\mathscr{O}(\mathbb{R}^3)$.

a. Existe-t-il une application continue $f \left| \begin{array}{l} [0, 1] \longrightarrow \mathscr{O}(\mathbb{R}^3) \\ t \longrightarrow f(t) \end{array} \right.$

telle que $f(0) = Id$ et $f(1) = R$.

b. Même question en remplaçant R par S.

c. Étudier la convergence et la limite éventuelle de chacune des deux suites suivantes :

$$\left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} R^k \right)_{N \geqslant 1} \quad , \quad \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S^k \right)_{N \geqslant 1}$$

3. — Soit $u \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^n)$.

a. Prouver que $\operatorname{Ker}(Id - u)$ et $\operatorname{Im}(Id - u)$ sont orthogonaux.

b. La suite $\left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u^k \right)_{N \geqslant 1}$ est-elle convergente ? Préciser la limite à l'aide des données du **III.3.***a* dans les cas de convergence.